15/10/15

$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$

$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$

$A - B = \{x : x \in A \land x \notin B\}$

$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

$A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

$A \subseteq A \cup B$ & $B \subseteq A \cup B$

$A - B = \{x : x \in A \land x \notin B\}$

$A \setminus B$

$\underline{\pi.\chi}$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5, 9\}$

$A \cap B = \{1\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$

$A - B = \{2, 3\} \subseteq A$

- $A - B \subseteq A$
- $A - A = \emptyset$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$

x τυχόν

$x \in A - B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \land x \notin B \overset{?}{\Rightarrow} x \in A}_{}$

$\underbrace{P \land q \Rightarrow P}_{\text{(πάντα) αληθής}}$

$\left.\begin{matrix} \emptyset - A \subseteq \emptyset \\ \emptyset \subseteq \emptyset - A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \emptyset - A = \emptyset$

Έστω $A - A \neq \emptyset$

Τότε $\exists x : x \in A - A \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \land x \notin A}_{}$

$\underbrace{P \land (\sim P)}_{}$

$\Downarrow$

*) $\sim(P \land q) \Leftrightarrow (\sim P) \lor (\sim q)$

**) $\sim(P \lor q) \Leftrightarrow (\sim P) \land (\sim q)$

$x \in X - (A - B) \Rightarrow x \in X \land x \notin A - B$

→ $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \lor x \notin B$

→ $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \land x \notin B$

→ $x \notin A - B \Leftrightarrow \sim x \in A - B \Leftrightarrow \sim(x \in A \land x \notin B) \Leftrightarrow \sim(x \in A) \lor \sim(x \notin B)$

$\Leftrightarrow [\sim(x \in A)] \lor [\sim(\sim x \in B)] \Leftrightarrow x \notin A \lor x \in B$

$A \dot{+} B = \{x : x \in A \veebar x \in B\}$
↓
συμμετρική διαφορά

x τυχόν

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

$x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \lor x \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{P} \lor (x \in B \land x \in \Gamma) \Leftrightarrow$

(*)

$\Leftrightarrow (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \cup B \land x \in A \cup \Gamma$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

2) $A - B = A - (A \cap B)$

3) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

4) $A \cup (B - A) = A \cap B$

1) ($\Rightarrow$) Έστω ισχύει $A \subseteq B$ και $A - B \neq \varnothing$

Αφού $A - B \neq \varnothing \Leftrightarrow (\exists x) : x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$ Άτοπο (γιατί $A \subseteq B$)

($\Leftarrow$)

Έστω ισχύει $A - B = \varnothing$ και $A \nsubseteq B$

$A \nsubseteq B$ Άρα $(\exists x)\, x \in A \land x \notin B \Rightarrow (\exists x) : x \in A - B$ (άτοπο γιατί $A - B = \varnothing$)

2) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$

$x \in A - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \land x \notin A \cap B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{P} \land (x \notin A \lor x \notin B)$

$P \land (q \lor r) \Leftrightarrow (P \land q) \lor (P \land r)$

$\Leftrightarrow (x \in A \land x \notin A) \lor (x \in A \land x \notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A - A) \lor (x \in A - B) \Leftrightarrow x \in \varnothing \lor x \in A - B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing \cup (A - B) = A - B$

3)

$~~\ldots~~$ $x \in (A\cap B) - (A \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A\cap B \wedge x \notin A\cap\Gamma$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A \wedge x \in B)}_{p} \wedge (x \notin A \vee x \notin \Gamma) \Leftrightarrow$

$\wedge (q \vee r)$

$\Leftrightarrow [(x\in A \wedge x\in B)\wedge x\notin A] \vee [(x\in A \wedge x\in B)\wedge x\notin\Gamma]$

$\underbrace{(\underbrace{x\in A \wedge x\notin A}_{\psi}) \wedge x \in B}_{\psi}$

$\Updownarrow$

$x\in A \wedge (x\in B \wedge x\notin\Gamma)$

$\Updownarrow$

$x\in A \wedge x\in B-\Gamma$

$\Updownarrow$

$x\in A\cap(B-\Gamma)$

α) $A \subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$

β) $A \subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$

γ) $(A\cap B) - \Gamma = A\cap(B-\Gamma)$

δ) $\Gamma - (A\cap B) = (\Gamma - A)\cup(\Gamma - B)$

ε) $\Gamma - (A\cup B) = (\Gamma - A)\cap(\Gamma - B)$

α) Έστω ισχύει $A \subseteq B$ Ισχύει πάντοτε $B \subseteq A\cup B$

1) Αρκεί ν.δ.ο $A\cup B \subseteq B$. x τυχόν $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

$A \subseteq$ (υπόθ) $\quad p\vee p \Leftrightarrow p$

$\Rightarrow x\in B \vee x\in B \Rightarrow x\in B$ Άρα $A\cup B\subseteq B$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow A\cup B = B$

Έστω

$A\cup B = B$ θ.δ.ο $A\subseteq B$ ~~...~~ Ισχύει πάντοτε

$A\subseteq A\cup B = B \Rightarrow A\subseteq B$

Δυναμοσύνολο : A σύνολο $P(A) = \{x : x\subseteq A\}$

7. X

$A=\{1,2\}$ $\quad P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ $\quad$ Το δυναμοσύνολο κάθε συνόλου ($\forall A$)

$P(A)\neq\emptyset$ $\quad \emptyset=\{\ \}$

$P(\emptyset)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

Να Βρεθεί το $P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}$

Αν A,B είναι σύνολα, ν.δ.ο $A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

$\Rightarrow$) Εάν $A\subseteq B$ Θ.δ.ο $P(A)\subseteq P(B)$

(υπόθ) Έστω X σύνολο τυχόν: $X\in P(A)\Rightarrow X\subseteq A \xRightarrow{A\subseteq B}$

$\Rightarrow X\subseteq B \Leftrightarrow X\in P(B)$ Άρα $P(A)\subseteq P(B)$

$\Leftarrow$) Εάν $P(A)\subseteq P(B)$ Θ.δ.ο. $A\subseteq B$ Για τυχόν στοιχείο x: $x\in A \Leftrightarrow \{x\}\subseteq A \Leftrightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow$

$\xRightarrow{P(A)\subseteq P(B)\,(\text{υπόθ})} \{x\}\in P(B) \Leftrightarrow \{x\}\subseteq B \Leftrightarrow x\in B$

Δηλ. $A\subseteq B$

$(A\in P(A)) \xRightarrow{P(A)\subseteq P(B)} A\in P(B) \Leftrightarrow A\subseteq B$

$A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}$ $\quad (\Rightarrow)$

Εάν $A\cap B=\emptyset$ κ $P(A)\cap P(B)\neq\{\emptyset\}$ Άρα $\exists X\neq\emptyset$:

$: X\in P(A)\cap P(B) \Leftrightarrow X\in P(A)\wedge X\in P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X\subseteq A\wedge X\subseteq B \Rightarrow \emptyset\neq X\subseteq A\cap B \Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$ άτοπο!

$(\Leftarrow)$